САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Багаев, Н. Г. Гельфрейх

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: НЕЗАВИСИМЫЕ И НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2021

Рецензенты: проф., д-р физ.-мат. наук Т. А. Суслина,
проф., д-р физ.-мат. наук С. Л. Яковлев

Печатается по решению Учёного совета физического факультета СПбГУ.

А. А. Багаев, Н. Г. Гельфрейх ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:
НЕЗАВИСИМЫЕ И НЕКОРРЕЛИРОВАННЫЕ
ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. СПб. 2021

В данном учебно-методическом пособии приведены 30 задач по частному разделу теории вероятностей, касающемуся таких понятий, как независимость и некоррелированность случайных величин и соотношения между ними. Все рассматриваемые случайные величины устроены максимально просто — принимают по три значения. Это сделано для того, чтобы вычисления не были избыточно громоздкими и не подменяли собой понимание сути вопроса. Изложена вся необходимая для решения данного типа задач теория, для чего, в свою очередь, кратко приведены основные сведения из общей теории вероятностей. Также подробно рассмотрены примеры и ситуации, которые могут возникать при решении таких задач. Для всех задач приведены ответы. Пособие может быть использовано на практических занятиях обучающихся на основных образовательных программах по уровню бакалавриат «Инженерно-ориентированная физика» и «Прикладные физика и математика» по направлению «Прикладные математика и физика», «Физика» по направлению «Физика», «Электромагнитные и акустические процессы» по направлению «Радиофизика» Санкт-Петербургского государственного университета. Также задачи можно предлагать экзаменующимся по учебной дисциплине «Теория вероятностей».

Содержание

Напоминание об основных понятиях теории вероятностей 4
1. Вероятностное пространство. 4
2. Случайные величины и их распределения. 4
3. Математическое ожидание случайной величины. 6
Независимые и некоррелированные случайные величины 7
Примеры решения задач 10
Пример 1 10
Пример 2 11
Пример 3 12
Задачи для самостоятельного решения 13
Ответы 16
Список литературы 17

Напоминание об основных понятиях теории вероятностей

1. Вероятностное пространство. *Вероятностное пространство* это тройка объектов $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, где

Ω — *пространство элементарных событий*, достаточно произвольное множество; элементы Ω — *элементарные события*;

$\mathscr{F}$ — *сигма-алгебра событий*, т. е. произвольная система подмножеств множества Ω, содержащая само Ω и пустое множество $\varnothing$, замкнутая относительно объединения множеств и дополнения к множеству Ω (а по закону двойственности — и относительно пересечения множеств); элементы $\mathscr{F}$ — *события*;

P — *вероятность* — любое отображение $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$, удовлетворяющее аксиомам счётной аддитивности и нормировки.

С точки зрения физики, вероятностное пространство — модель случайного эксперимента.

2. Случайные величины и их распределения. Если задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, можно рассмотреть, во-первых, вещественные *случайные величины* — такие отображения $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых

$$\forall A \subset \mathbb{R}\ \xi^{-1}(A) \equiv \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in A\} \in \mathscr{F}.$$

Удобно ввести обозначение $\{\xi \in A\} := \xi^{-1}(A)$ ($\{\xi \in A\} \in \mathscr{F}$). Здесь можно считать, что A — либо произвольное подмножество $\mathbb{R}$, либо произвольный элемент $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ — борелевской сигма-алгебры на оси. Это сигма-алгебра, образованная всевозможными открытыми и замкнутыми подмножествами вещественной оси, их произвольными объединениями и пересечениями. А, во-вторых, можно ввести понятие *распределения случайной величины* $\mathscr{P}_\xi$:

$$\mathscr{P}_\xi : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1] : A \mapsto P(\{\xi \in A\})$$

(распределение — это случайная мера на вещественной оси).

Случайная величина называется дискретной, если она принимает не более чем счётное число значений. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ или $\{x_k\}_{k=1}^{N}$, где $\forall k$ $x_k \in \mathbb{R}$ — последовательность всех возможных значений дискретной случайной величины ξ, её распределение может быть представлено таблицей

$N \times 2$ (или неограниченной длины):

$$\mathscr{P}_\xi : \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \cdots & x_N & \cdots \\ \hline p_1 & \cdots & p_N & \cdots \end{array}, \tag{1a}$$

где в первой строке отложены значения, которые принимает ξ, а во второй — вероятности этих значений: $p_k := P(\{\xi \in \{x_k\}\}) \equiv P(\{\xi = x_k\})$. При этом обязательно должно быть выполнено условие нормировки: $\sum\limits_k p_k = 1$. Используя понятие дельта-меры множества

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

распределение можно записать формулой

$$\mathscr{P}_\xi = \sum_k p_k \delta_{x_k}. \tag{1b}$$

Если имеется не одна вещественная случайная величина, а две или более, мы говорим, что определён случайный вектор. На случайные векторы обобщается понятие распределения — вводится их *совместное распределение*. В частности, совместное распределение двух случайных величин ξ и η

$$\mathscr{P}_{\xi\eta} : \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \to [0,1] : A \mapsto P\left(\left\{\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \in A\right\}\right),$$

где $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ — стандартным образом определяемая борелевская сигма-алгебра на плоскости.

Имеется связь совместного распределения двух случайных величин и распределений каждой из этих величин (их ещё называют одномерными распределениями):

$$\begin{aligned} &\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \;\; \mathscr{P}_\xi(A) = \mathscr{P}_{\xi\eta}(A \times \mathbb{R}); \\ &\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \;\; \mathscr{P}_\eta(B) = \mathscr{P}_{\xi\eta}(\mathbb{R} \times B). \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, зная совместное распределение можно найти все одномерные распределения. (Эти формулы, разумеется, понятным образом обобщаются на произвольную размерность случайного вектора.) Обратное неверно: зная одномерные распределения двух случайных величин нельзя построить их совместное распределение без дополнительных предположений.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ (или $\{x_k\}_{k=1}^{N}$) и $\{y_l\}_{l=1}^{\infty}$ (или $\{y_l\}_{l=1}^{M}$) — последовательности всех возможных значений дискретных случайных величин ξ и η соответственно. Их совместное распределение удобно изобразить таблицей $(N+1)\times(M+1)$ (или неограниченной длины/ширины):

$$\mathscr{P}_{\xi\,\eta}: \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi\setminus\eta & y_1 & \cdots & y_M & \cdots \\ \hline x_1 & r_{1\,1} & \cdots & r_{1\,M} & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \hline x_N & r_{N\,1} & \cdots & r_{N\,M} & \cdots \end{array}, \tag{3a}$$

где

$$r_{k\,l} = P\left(\left\{\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}x_k\\ y_l\end{pmatrix}\right\}\right\}\right) \equiv P(\{\xi = x_k, \eta = y_l\})$$

с обязательным условием нормировки $\sum\limits_{k,l} r_{k\,l} = 1$.

В терминах дельта-меры

$$\mathscr{P}_{\xi\,\eta} = \sum_{k,l} r_{k\,l}\delta_{(x_k,y_l)}. \tag{3b}$$

Формулы (2) в дискретном случае приобретают вид

$$\begin{aligned} \forall k = 1,\ldots,N,\ldots\ p_k &= \sum_l r_{k\,l}; \\ \forall l = 1,\ldots,M,\ldots\ q_l &= \sum_k r_{k\,l}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\mathscr{P}_{\eta}: \begin{array}{c|c|c|c} y_1 & \cdots & y_M & \cdots \\ \hline q_1 & \cdots & q_M & \cdots \end{array} \tag{5a}$$

или

$$\mathscr{P}_{\eta} = \sum_l q_l\delta_{y_l} \tag{5b}$$

— одномерное распределение η, а (1) — одномерное распределение ξ. Т. е. для того, чтобы найти одномерные распределения, зная совместное, надо просуммировать вероятности в его таблице либо по строкам, либо по столбцам.

3. Математическое ожидание случайной величины. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ с распределением (1) называется величина

$$E\xi = \sum_k x_k p_k. \tag{6}$$

Очевидно, математическое ожидание — это вещественное число. Если ξ принимает конечное число значений, то $E\xi$ — конечная величина (или говорят, что математическое ожидание ξ существует). Если же ξ заведомо принимает счётное число значений, математическое ожидание может существовать, а может и не существовать (когда числовой ряд, в который превращается сумма, расходится).

Как функционал случайных величин, математическое ожидание обладает свойством линейности, удовлетворяет неравенству треугольника.

Математическое ожидание случайной величины может быть найдено не только непосредственно из её распределения (1) или (5), но и из совместного распределения (3):

$$E\xi = \sum_{k,l} x_k r_{k\,l}, \;\; E\eta = \sum_{k,l} y_l r_{k\,l}.$$

Эти формулы непосредственно следуют из определения математического ожидания и (2).

Произведение двух случайных величин, очевидно, также является случайной величиной. Математическое ожидание произведения выражается следующей формулой [1, 2]:

$$E\xi\eta = \sum_{k,l} x_k y_l r_{k\,l}. \tag{7}$$

Независимые и некоррелированные случайные величины

Если имеется совместное распределение двух случайных величин, для них можно ввести два важных понятия — независимость и некоррелированность.

Определение 1. Две случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если $\forall A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ события $\{\xi \in A\}$ и $\{\eta \in B\}$ независимы, т. е.

$$P(\{\xi \in A\} \cap \{\eta \in B\}) \equiv P(\{\xi \in A, \eta \in B\}) = P(\{\xi \in A\})P(\{\eta \in B\}).$$

Определение независимости двух случайных величин эквивалентно факторизации их совместного распределения:

$$\forall A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \;\; \mathscr{P}_{\xi\eta}(A \times B) = \mathscr{P}_{\xi}(A)\mathscr{P}_{\eta}(B).$$

В частности, для дискретных случайных величин ξ и η, имеющих распределения (1) и (5) соответственно, совместное распределение (3) принимает вид

$$\mathscr{P}_{\xi\eta}: \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} \xi \setminus \eta & y_1 & \cdots & y_M & \cdots \\ \hline x_1 & p_1 q_1 & \cdots & p_1 q_M & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \hline x_N & p_N q_1 & \cdots & p_N q_M & \cdots \end{array}$$

или

$$\mathscr{P}_{\xi\eta} = \sum_{k,l} p_k q_l \delta_{(x_k, y_l)},$$

т. е. $\forall k = 1, \ldots, N, \ldots \forall l = 1, \ldots, M, \ldots$

$$r_{k\,l} = p_k q_l. \tag{8}$$

Определение 2. *Ковариацией* случайных величин ξ и η называется величина

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta).$$

В некоторых случаях более удобна другая формула для ковариации, очевидно следующая из определения и линейности математического ожидания:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta. \tag{9}$$

Определение 3. Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Независимые и некоррелированные случайные величины — это, разумеется, частный случай случайных величин вообще. Но они обладают рядом замечательных свойств, что делает их удобным объектом для изучения и применения. Например, если ξ и η либо 1) независимые, либо 2) некоррелированные случайные величины с конечными математическими ожиданиями, то

$$E\xi\eta = E\xi E\eta. \tag{10}$$

Факторизация математического ожидания позволяет упростить некоторые формулы теории вероятностей. Однако надо понимать, что в первом случае (10) следует из (7), (8) и определения (6), а во втором — из (9) и определения 3. Поэтому важно уметь, глядя на совместное распределение двух случайных величин, определить, являются ли они некоррелированными или независимыми, а также различать эти случаи.

Очевидно следующее

С в о й с т в о: Если случайные величины ξ и η независимы, то они некоррелированы.

Для доказательства просто сопоставим (6), (7), (8) и (9). Обратное, вообще говоря, неверно [1, 2].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть дано совместное распределение двух случайных величин ξ и η. Требуется выяснить, являются ли эти случайные величины 1) некоррелированными, 2) независимыми.

Разумеется, можно решить оба пункта непосредственно, вычислив ковариацию и установив независимость по определению 1. Для этого находим одномерные распределения по правилам (4) и проверяем $N \times M$ произведений (8).

Однако благодаря свойству возможно некоторое упрощение решения — в некоторых ситуациях достаточно знать ответ на один вопрос из двух. Имеются две таких ситуации.

1. Допустим, выяснилось, что $\mathrm{cov}(\xi, \eta) \neq 0$. Тогда по свойству ξ и η не являются независимыми. Ответ: 1) нет, 2) нет.

2. Пусть мы определили, что ξ и η независимы. Тогда автоматически $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$. Ответ: 1) да, 2) да.

Если же $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$, то сразу ничего нельзя сказать про независимость ξ и η — необходимы проверять определение 1 (формулу (8)). Аналогично из того, что ξ и η не являются независимыми, ничего нельзя сказать об их некоррелированности — необходимо явно вычислить их ковариацию.

З а м е ч а н и е. Если сравнить два свойства случайных величин, независимость и некоррелированность, то первое свойство — «тоньше». Необходимо выполнение всех $N \times M$ равенств (8) для обеспечения независимости случайных величин ξ и η. А для выяснения отсутствия независимости достаточно невыполнения хотя бы одного из этих равенств. Оно и понятно, поскольку, быть случайным величинам независимыми или нет, определяется только набором вероятностей в таблице (3а). Тогда как ковариация зависит как от этих вероятностей, так и от значений, которые принимают случайные величины. Поэтому верен следующий факт.

Пусть ξ и η, во-первых, не являются независимыми, а, во-вторых, принимают не менее трёх значений каждая. Тогда всегда можно подобрать значения ξ и η так, чтобы $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Примеры решения задач

Пример 1. Дано совместное распределение двух случайных величин ξ и η,

$$\mathscr{P}_{\xi\eta}:\quad \begin{array}{c|c|c|c} \xi \setminus \eta & -2 & 1 & 2 \\ \hline -2 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline -\frac{4}{3} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{array}$$

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η

1) некоррелируемыми;

2) независимыми?

Р е ш е н и е: 1) Вычислим явно ковариацию ξ и η. Воспользуемся, например, определением 2. Для этого сначала сосчитаем математические ожидания наших случайных величин:

$$E\xi = (-2)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 0\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{16} + 0 + \frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) =$$
$$= -\frac{5}{8} - \frac{5}{12} + \frac{3}{8} = -\frac{2}{3};$$

$$E\eta = (-2)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + 1\left(\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) =$$
$$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{3}{4}.$$

Теперь вычислим по определению ковариацию:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \left(-2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(-2 - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{16} +$$

$$+\left(-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(-2-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{16}+\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(-2-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{16}+$$
$$+\left(-2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}+\left(-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot 0+$$
$$+\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}+$$
$$+\left(-2-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(2-\frac{3}{4}\right)\cdot 0+\left(-\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(2-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}+$$
$$+\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(2-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{16}=$$
$$=\left[\frac{11}{48}+\frac{11}{96}-\frac{55}{192}\right]+\left[-\frac{1}{12}+\frac{5}{48}+0\right]+\left[0-\frac{5}{24}+\frac{25}{192}\right]=$$
$$=\frac{11}{192}+\frac{1}{48}-\frac{5}{64}=\frac{11+4-15}{192}=0.$$

2) Мы определили, что ξ и η некоррелированные. Но это ничего не говорит нам о независимости ξ и η. Проверим независимость по определению. Для этого сначала найдём одномерные распределения:

$$\mathscr{P}_\xi:\ \begin{array}{c|c|c} -2 & -\frac{4}{3} & 1 \\ \hline \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{array},\quad \mathscr{P}_\eta:\ \begin{array}{c|c|c} -2 & 1 & 2 \\ \hline \frac{3}{16} & \frac{1}{2} & \frac{5}{16} \end{array}$$

Теперь надо проверить 9 равенств (8). Убеждаемся, что уже для $k = l = 1$ имеет место $\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{16}=\frac{15}{16}\neq\frac{1}{16}$. Следовательно, случайные величины ξ и η не являются независимыми.

О т в е т: 1) да, 2) нет.

Пример 2. Дано совместное распределение двух случайных величин ξ и η,

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi \setminus \eta$	1	2	3
2	$\frac{1}{4}$	0	0
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{1}{4}$	0

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η

1) некоррелируемыми;

2) независимыми?

Р е ш е н и е: Найдём ковариацию не по определению 2, а по формуле (9). Для этого сначала найдём одномерные распределения ξ и η:

$$\mathscr{P}_\xi : \begin{array}{c|c|c} 2 & 3 & 4 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}, \quad \mathscr{P}_\eta : \begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Математические ожидания ξ и η вычислим непосредственно из этих распределений:

$$E\xi = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3;$$
$$E\eta = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2.$$

Математическое ожидание произведения найдём из формулы (7):

$$E\xi\eta = 2 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}.$$

Следовательно, ковариация

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4} \neq 0,$$

т. е. случайные величины ξ и η не являются некоррелированными. А поэтому они не являются и независимыми.

О т в е т: 1) нет, 2) нет.

Пример 3. Дано совместное распределение двух случайных величин ξ и η,

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η

1) некоррелируемыми;

2) независимыми?

Р е ш е н и е: Для разнообразия начнём решение задачи со второго пункта.

2) Найдём совместные распределения:

$$\mathscr{P}_\xi: \begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}, \quad \mathscr{P}_\eta: \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Очевидно, что $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, а $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, следовательно, случайные величины ξ и η независимы. Поэтому они также некоррелированы.

О т в е т: 1) да, 2) да.

Задачи для самостоятельного решения

Все задачи имеют одинаковую формулировку:

Дано совместное распределение двух дискретных случайных величин ξ и η. Каждая из случайных величин принимает три значения.

Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η

1) некоррелируемыми;

2) независимыми?

Задача 1

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-4	0	1
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{3}$

Задача 2

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Задача 3

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

Задача 4

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Задача 5

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{4}{9}$	0
3	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

Задача 6

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	1	2	3
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
0	0	$\frac{4}{9}$	0
1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

Задача 7

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	0	$\frac{1}{4}$
7	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 8

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{4}$

Задача 9

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	0	$\frac{4}{9}$	0
1	$\frac{4}{9}$	0	0
2	0	0	$\frac{1}{9}$

Задача 10

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 11

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 12

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 13

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 14

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-6	0	$\frac{1}{9}$	0
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Задача 15

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

Задача 16

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

Задача 17

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	2
-4	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Задача 18

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-4	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

Задача 19

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	0	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Задача 20

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	0	$\frac{1}{5}$	0
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Задача 21

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	0
2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Задача 22

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	0	$\frac{1}{5}$	0
1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Задача 23

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	0
2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$

Задача 24

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	3
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	0	0	$\frac{1}{3}$

Задача 25

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	0	1	4
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	0
6	0	0	$\frac{1}{4}$

Задача 26

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-3	0	15
1	0	$\frac{1}{4}$	0
6	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
7	0	$\frac{1}{4}$	0

Задача 27

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	1	2	6
-1	0	$\frac{4}{9}$	0
0	$\frac{4}{9}$	0	0
9	0	0	$\frac{1}{9}$

Задача 28

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-2	-1	6
-2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
3	0	0	$\frac{1}{3}$

Задача 29

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Задача 30

$\mathscr{P}_{\xi\eta}$:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Ответы

1. 1) да, 2) нет. **2.** 1) да, 2) нет. **3.** 1) да, 2) нет. **4.** 1) да, 2) нет. **5.** 1) да, 2) нет. **6.** 1) да, 2) нет. **7.** 1) да, 2) нет. **8.** 1) да, 2) нет. **9.** 1) да, 2) нет. **10.** 1) да, 2) нет. **11.** 1) да, 2) нет. **12.** 1) да, 2) нет. **13.** 1) да, 2) нет. **14.** 1) да, 2) нет. **15.** 1) да, 2) нет. **16.** 1) да, 2) нет. **17.** 1) да, 2) нет. **18.** 1) да, 2) нет. **19.** 1) да, 2) нет. **20.** 1) да, 2) нет. **21.** 1) да, 2) нет. **22.** 1) да, 2) нет. **23.** 1) да, 2) нет. **24.** 1) нет ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 1$), 2) нет. **25.** 1) нет ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 2$), 2) нет. **26.** 1) нет ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 3$), 2) нет. **27.** 1) нет ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 4$), 2) нет. **28.** 1) нет ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 5$), 2) нет. **29.** 1) да, 2) да. **30.** 1) да, 2) да.

Список литературы

[1] *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

[2] *Бородин А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 1999.